TD 7 - Inversion locale, fonctions implicites et extrema liés

Questions de cours.

(a) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie au voisinage de $p_0 \in \mathbb{R}^n$. Que veut dire "f est un difféomorphisme local au point p_0" ?

(b) Donner la définition de difféomorphisme (global).

(c) Énoncer le théorème d'inversion locale.

(d) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un difféomorphisme local au point $p_0 \in \mathbb{R}^n$. Soit g la réciproque de f au voisinage de p_0. Exprimer la valeur de dg en $f(p_0)$ en foncton de df.

(e) Énoncer le théorème des fonctions implicites.

(f) Soit $f : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{n+m}$, et $c \in \mathbb{R}^m$. Donner des conditions pour l'existence d'une application $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de x_0 telle que le lieu $\{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m} \mid f(x, y) = c\}$ soit donné par le graphe de g localement en p_0. Exprimer dg_{x_0} en fonction de df_{p_0}.

(g) Soit $f : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $c \in \mathbb{R}^m$. Soit $S = \{p \in \mathbb{R}^{n+m} \mid f(p) = c\}$. Que veut dire : "$p_0$ est un point régulier de S" ?

(h) Soit $f : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $c \in \mathbb{R}^m$. Soit $S = \{p \in \mathbb{R}^{n+m} \mid f(p) = c\}$ et $p_0 \in S$ un point régulier de S. Donner un système d'équations qui définit l'hyperplan tangent de S en p_0.

(i) Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie au voisinage $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ d'un point x_0. Sous quelle condition l'ensemble $f(\Omega)$ admet (localement) un hyperplan tangent H (de dimension n) en $f(x_0)$? Donner une paramétrisation de H (c'est-à-dire, trouver un système de générateurs pour l'hyperplan affine H).

(j) Donner la définition d'extrema liés.

(k) Énoncer le théorème du multiplicateur de Lagrange.

(l) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, et $g : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $S = \{x \in \Omega \mid g(x) = 0\}$, et considerons l'application $f|_S$. Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla f(x_0) + \lambda \nabla g(x_0) = 0$ pour un certain $x_0 \in S$. Est-ce que x_0 est forcement un extremum local de $f|_S$? Et si x_0 est un point régulier de S ?

Inversion locale

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = x^3$.

(a) Montrer que f est une bijection, mais pas un difféomorphisme.

(b) Est-ce que f est un difféomorphisme local en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$?

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $f(x, y) = (x^2, y^2)$.

(a) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$, et calculer la différentielle de f.

(b) Est-ce que f est un difféomorphisme local au point $p_0 = (0, 0)$? Au point $p_1 = (1, 0)$? Au point $p_2 = (2, -1)$?

(c) Montrer que pour tout voisinage U de p_0, l'application $f|_U$ n'est pas injective.

(d) Calculer la réciproque g de $f : U \to f(U)$, où U est un voisinage opportun de p_2. Quelle est la valeur de $dg_{f(p_2)}$?

(e) Montrer que f restreinte à $A = \mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}^*_+$ est injective. En déduire que $f|_A : A \to A$ est un difféomorphisme.

(f) Soit $B = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$. Montrer que $f(B) = A$. Est-ce que $f|_B : B \to A$ est un difféomorphisme ?

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.

(a) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$, et calculer la différentielle de f.

(b) En quels points de $\mathbb{R}^2$ l'application f est-elle un difféomorphisme local ?

Soit $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$ l'identification de $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $\phi : z = x + iy \mapsto (x, y)$.

(c) Quelle est l'action de f si on voit $\mathbb{R}^2$ comme $\mathbb{C}$? (C'est-à-dire, calculer $F = \phi^{-1} \circ f \circ \phi$).

(d) Soit $p_0 = -1 \in \mathbb{C}$. Montrer que F admet un inverse local G en p_0. Expliciter la formule qui définit G (en forme exponentielle). En déduire que f admet un inverse local g en $(-1, 0)$, et expliciter les formules qui définissent g.

(e) Est-ce que F définit un difféomorphisme de $\mathbb{C}^*$ à $\mathbb{C}^*$?

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$.

(a) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$, et calculer la différentielle de f.

(b) En quels points de $\mathbb{R}^2$ l'application f est-elle un difféomorphisme local ?

Soit $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$ l'identification de $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $\phi : z = x + \mathrm{i}y \mapsto (x, y)$.

(c) Quelle est l'action de f si on voit $\mathbb{R}^2$ comme $\mathbb{C}$? (C'est-à-dire, calculer $F = \phi^{-1} \circ f \circ \phi$).

(d) Est-ce que F définit un difféomorphisme de $\mathbb{C}$ avec son image ?

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $f(x, y) = (xe^y, e^x - \cos y)$.

(a) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$, et calculer la différentielle df de f.

(b) Calculer le déterminant jacobien $J(f)$ de f, et en déduire le lieu de $\mathbb{R}^2$ où f n'est pas un difféomorphisme local.

(c) Étudier la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = xe^x$.

(d) Montrer que f est un difféomorphisme local sur $A =]1, +\infty[\times \mathbb{R}$.

(e) Montrer que f définit un difféomorphisme de A sur son image.

Exercice 6. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, soit $f_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f_t(x) = x^2 - tx$.

(a) Calculer f_t'. En déduire l'ensemble $\mathrm{Crit}(f_t)$ des points où f_t n'est pas un difféomorphisme local.

Soit maintenant $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, t) = f_t(x)$.

(b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$, et calculer la différentielle df_t de f_t.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, soit $C_\alpha = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, t) = \alpha\}$, et $p_0 \in C_\alpha$ un point.

(c) Dessiner C_0.

(d) Pour quels valeurs de $p_0 = (x_0, t_0) \in C_0$ la courbe C_0 est-elle localement en p_0 le graphe d'une fonction $\mathcal{C}^1$ par rapport à x ? Et par rapport à t ?

(e) Est-ce qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tel que la courbe C_0 est, localement en $(0, 0)$, le graphe d'une fonction par rapport à la coordonnée $ax + bt$, $(a, t) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$?

(f) Répondre aux questions (c, d, e) pour C_α avec $\alpha = 1$, et avec $\alpha = -2$.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x, y) = y^2 - x^2 - x^3$. Soit $C = f^{-1}(0)$.

(a) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$, et calculer le gradient ∇f de f.

(b) Pour quelles valeurs de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ la courbe C est-elle localement le graphe d'une fonction $\mathcal{C}^1$ par rapport à x ? Et par rapport à y ?

(c) Dessiner C.

(d) Déterminer l'équation de la droite tangente à C en $(-1, 0)$, puis en $(1, -\sqrt{2})$.

Soit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $\gamma(t) = (t^2 - 1, t^3 - t)$.

(e) Montrer que γ est une paramétrisation régulière de la courbe C (c'est-à-dire, $d\gamma(t) \neq (0, 0)$ pour tout t et $\gamma(\mathbb{R}) = C$).

(f) Est-ce que γ est injective ? En déduire si γ est un difféomorphisme avec son image.

(g) Calculer $\gamma(0)$ et $d\gamma(0)$. En déduire l'équation de la droite tangente à C en $\gamma(0)$.

(h) Pour $t_\pm = \pm 1$, calculer $\gamma(t_\pm)$ et $d\gamma(t_\pm)$. En déduire l'équation des droites tangentes à $\gamma(V_\pm)$ en $\gamma(t_\pm)$, où $V_\pm$ est un voisinage de $t_\pm$ tel que $\gamma|_{V_\pm}$ définit un difféomorphisme avec son image.

Exercice 8. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, soit $f_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application donnée par $f_t(x, y) = (x^2 + ty, xy - t)$.

(a) Justifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$, f_t est de classe $\mathcal{C}^1$, et calculer la différentielle df_t de f_t.

(b) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, décrire géométriquement le lieu D_t où f_t n'est pas un difféomorphisme local.

Soit maintenant $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, t) = f_t(x, y)$.
Pour tout $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, soit $C_v = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + ty = a, xy - t = b\} = f^{-1}(\{v\})$.

(c) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$, et calculer la différentielle df_t de f_t.

(d) Soit $v = 0 \in \mathbb{R}^2$. Trouver les points $p \in C_0$ où la courbe C_0 n'est pas (localement en p) de la forme $\{x = g(t), y = h(t)\}$, où g et h sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

(e) Répondre à la question précédente pour C_v pour toute valeur de $v \in \mathbb{R}^2$. En déduire pour quels valeurs de $v \in \mathbb{R}^2$ la courbe C_v est (globalement) le graphe d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, de la forme $\{(x, y) = (g(t), h(t))\}$.

(f) Trouver une courbe $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ telle que C_v est une courbe régulière (c'est-à-dire, localement en tout point le graphe d'une fonction par rapport à certaines coordonnées) pour tout $v \notin \Gamma$.

Exercice 9. Soit $C = g^{-1}(\{0\})$, où $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est définie par $g(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^3 - x^2y^3$.

(a) Calculer le gradient de g.

(b) Décrire les points critiques de g (en donner les coordonnées quand possible).

(c) Montrer que $p = (1, 0)$ n'est pas un point régulier de C, mais il admet une droite tangente, que l'on déterminera.

(d) Quelle relation y a-t-il entre les points critiques de g dans C, les points de C où C n'est pas régulière, et les points de C qui admettent une tangente ?

Exercice 10. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, soit $C_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - \alpha \sin(y) - x^2 = 0\}$.

(a) Montrer que $C_\alpha \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -|\alpha| \leq y - x^2 \leq |\alpha|\}$.

(b) Montrer que les points de C_α à tangente horizontale sont contenus dans l'axe des ordonnées.

(c) Soit n_α le nombre de points à tangente horizontale de C_α. Montrer que $n_\alpha = n_{-\alpha}$ et que la fonction $n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{N}$, $\alpha \mapsto n_\alpha$ est croissante.

(d) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que si $(2k - 1)\pi \leq |\alpha| \leq 2k\pi$, alors $n_k = 2k + 1$.

Exercice 11. Soit S la surface définie par $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - xy^3 - y^2z + z^3 = 0\}$.

(a) Montrer que $p_0 = (1, 1, 1)$ est un point régulier de S. Donner l'équation du plan tangent à S en p_0.

(b) Vérifier que au voisinage de p_0 la surface S est décrite par une équation de la forme $z = \phi(x, y)$, où ϕ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ définie au voisinage de $q_0 = (1, 1)$.

(c) Calculer $\nabla\phi(1, 1)$.

(d) Écrire le developpement limité de ϕ à l'ordre 2 en q_0.

(e) Donner la matrice hessienne de ϕ en q_0.

Extrema liés

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = (x^2 - 1)e^y$. Trouver les extrema de la restriction de f aux domaines suivants :

(a) A la boule fermée de centre 0 et rayon 1 pour la norme 2.

(b) B la boule fermée de centre 0 et rayon 2 pour la norme ∞.

(c) C la boule fermée de centre 0 et rayon 3 pour la norme 1.

Exercice 13. Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, et soit $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\}$.

(a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de C.

(b) Justifier le fait que $f|_C$ admet des points de maximum et de minimum globaux.

(c) Trouver une paramétrisation $\gamma : \mathbb{R} \to C$ de C.

(d) Étudier la fonction $f \circ \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. En déduire les extrema de $f|_C$, et la valeur du maximum et minimum de $f(C)$.

(e) Appliquer la méthode des multiplicateurs de Lagrange à f et $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4$. En déduire les valeurs possibles pour les points d'extrema. Soit A leur ensemble.

(f) Pour tout $a \in A$, décrire la droite L_a tangente à C en a.

(g) Pour tout $a \in A$, soit v_a un vecteur qui engendre L_a. Calculer ${}^tv_aH(f)(x_0)v_a$, et en déduire la nature du point a comme extremum (point de maximum/minimum local).

Exercice 14. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x, y) = x$, et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $g(x, y) = y^2 - x^3$. Soit $A = g^{-1}(0)$.

(a) Dessiner A dans le plan cartésien.

(b) En déduire que $(0, 0)$ est un point de minimum local pour $f|_A$.

(c) Soit $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$. Calculer ∇F en $(0, 0)$.

(d) Peut-on appliquer le théorème des multiplicateurs de Lagrange dans ce cas ? Justifier la réponse.

Exercice 15. Dans $\mathbb{R}^2$, considérons la fonction $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $\Phi(\rho, \theta) = (\rho \cos\theta, \rho \sin\theta)$. Pour tout $R, r \in \mathbb{R}_+$, $k \in \mathbb{N}^*$, soit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $\gamma(t) = (\rho(t), \theta(t)) = (t, R + r\cos(kt))$, et $C = \Phi \circ \gamma(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que Φ est un difféomorphisme local en dehors de la droite $\{\rho = 0\}$.

(b) Soit $R > r > 0$. Trouver les points de C les plus proches et les plus éloignés de l'origine (par rapport à la distance euclidienne).

(c) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x, y) = x^2 + y^2$. Trouver les extrema locaux et globaux de $f|_C$.

Exercice 16. On veut construire une boîte sans couvercle, en forme de pavé droit, de côtés a, b et de hauteur h. On a à disposition $9dm^2$ de matériel pour construire la boite. Quelles sont les valeurs de a, b, h qu'il faut prévoir pour avoir une boîte qui puisse contenir le plus grand volume possible ?

Exercice 17. Considerons une pyramide droite à base carrée de côté l et de hauteur h. Calculer le rapport h/l qu'il faut pour avoir la pyramide de volume le plus grand possible, à surface extérieure fixée.

Exercice 18. Soit $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0,\ x^2 + y^2 = 4\}$, et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $g(p) = d(p, C)$ pour tout $p \in \mathbb{R}^3$.

(a) Dessiner C.

(b) Exprimer les valeurs de $g(x, y, z)$ par une formule.

(c) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3 \setminus C$. Est-ce qu'elle est différentiable sur C ?

Exercice 19. Soient $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ donnée par $g(x, y, z) = \sqrt{z^2 + |x^2 + y^2 - 4|}$, et S la frontière de la boule de centre 0 et rayon 3.

(a) Dessiner le lieu $C = g^{-1}(0)$.

(b) Justifier sans calculs qu'il existe des points de maximum et minimum globaux pour $g|_S$.

(c) Trouver les points de maximum et minimum globaux pour $g|_S$.

(d) Donner une interprétation géométrique du résultat trouvé au point précédent.

Exercice 20. Soient $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ donnée par $h(x, y, z) = z^2 + \left|x^2 + y^2 - 4\right|$, $T = h^{-1}(\{1\})$, et $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

(a) Dessiner T.

(b) Calculer ∇h et montrer que $\nabla h(p) \neq (0, 0, 0)$ pour tout $p \in T$.

(c) Justifier sans calculs qu'il existe des points de maximum et minimum globaux pour $f|_T$.

(d) Trouver les points de maximum et minimum globaux de $f|_T$.

(e) Donner une interprétation géométrique du résultat trouvé au point précédent.

Exercice 21. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = x + y$, et considérons

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (|x| - 1)^2 + (|y| - 1)^2 \geq 1, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

(a) Étudier les extrema locaux et globaux de f.

(b) Dessiner A, et montrer que A est un compact. Est-ce que $f|_A$ admet des extrema globaux ?

(c) Calculer les extrema globaux et locaux de $f|_A$.

(d) Répondre aux questions (b, c) en remplaçant A par

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 2|x - y| + 2 \geq 1,\ x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Exercice 22. Déterminer les extrema liés de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ restreinte au lieu S dans les cas suivants :

(a) $f(x, y) = 2x + y, \qquad S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$.

(b) $f(x, y) = -x^2 + y^3 - 3y^2, \qquad S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 4y = 0\}$.

(c) $f(x, y, z) = x^2 - 2xy + z^2, \qquad S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, y + z = 0\}$.

(d) $f(x, y, z) = x + y - z, \qquad S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid\ \cos x + \cos y + \cos z = 0\}$.

Exercice 23. On considère $\mathbb{R}^n$ muni de n'importe quelle norme.

(a) Soit $B \subset \mathbb{R}^n$ une boule fermée de rayon fini. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur B, constante sur ∂B. Montrer qu'il existe un point $p \in \mathrm{Int}(B)$ tel que $\nabla f(p) = 0$.

(b) Soit $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ la sphère de centre 0 et de rayon 1 dans $\mathbb{R}^3$, et $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie et de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de $\mathbb{S}^2$. Montrer qu'il existe $p = (a, b, c) \in \mathcal{S}^2$ tel que

$$a\frac{\partial f}{\partial x}(p) + b\frac{\partial f}{\partial y}(p) + c\frac{\partial f}{\partial z}(p) = 0.$$